

Model eksplozji atomowej - przykładowe zadanie z fizyki wraz z moim autorskim rozwiązaniem

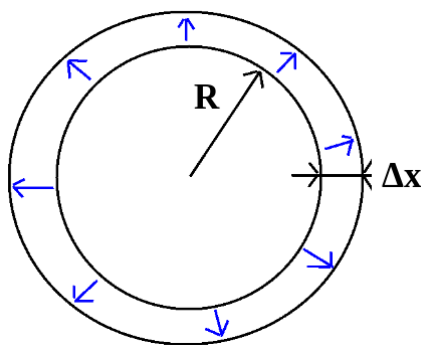
Zadanie z fizyki

W wyniku eksplozji atomowej wydzielila się energia E i powstała propagująca się fala uderzeniowa. Wyprowadzić wzór opisujący zależność ruchu czoła fali uderzeniowej od czasu: $R(t)$. Gęstość powietrza w atmosferze jest równa ρ .

Rozwiązanie zadania

Można przyjąć, że E jest energią kinetyczną powietrza o masie M , które porusza się z chwilową prędkością v . Na podstawie wzoru na energię kinetyczną: $E_k = \frac{1}{2}Mv^2$ można zaproponować model propagacji eksplozji w atmosferze.

Zakładamy, że R jest promieniem czoła fali uderzeniowej w danej chwili. Fala uderzeniowa propaguje się radialnie na zewnątrz, a czoło fali (część powietrza, które w danej chwili unosi energię kinetyczną) ma kształt fragmentu sferycznej warstwy o promieniu R i grubości Δx , zgodnie z poniższym rysunkiem:



Rysunek 1: W modelu sferyczna warstwa powietrza o promieniu R i grubości Δx unosi w danej chwili energię eksplozji E

Dążymy do wyprowadzenia zależności $R(t)$. Za objętość warstwy powietrza możemy przyjąć $V = S \cdot \Delta x$, gdzie S to pole powierzchni sfery o promieniu R , czyli $S = 4\pi R^2$. Zgodnie z definicją gęstości, masa powietrza jest równa $M = \rho \cdot V = \rho \cdot 4\pi R^2 \Delta x$.

Skoro $R(t)$ opisuje zależność ruchu czoła fali uderzeniowej od czasu, prędkość ruchu powietrza to (z różniczkowej definicji prędkości z kinematyki) pochodna promienia względem czasu: $v = \frac{dR}{dt}$, oraz otrzymujemy kwadrat prędkości jako $v^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2$

Podsumowując, we wzorze na energię kinetyczną E_k oznacza energię eksplozji, $M = \rho \cdot 4\pi R^2 \Delta x$ masę poruszającego się w fali uderzeniowej powietrza, $v^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2$ to kwadrat prędkości.

Wzór na energię kinetyczną:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (1)$$

Skoro $E_k = E$, to na podstawie wyprowadzonych wzorów na M oraz v^2 możemy napisać:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 4\pi R^2 \Delta x \cdot \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\frac{E}{2\pi\rho\Delta x} = R^2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

Gdy weźmiemy pierwiastek kwadratowy z obu stron równania, otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{\frac{E}{2\pi\rho\Delta x}} dt = R dR \quad (4)$$

W otrzymanym równaniu wartości: E , ρ , Δx traktujemy jako stałe które wyłączamy przed całkę, a zmienne to t oraz R , więc zmienne całkujemy stronami, otrzymując:

$$\sqrt{\frac{E}{2\pi\rho\Delta x}} \int dt = \int R dR \quad (5)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{\frac{E}{2\pi\rho\Delta x}} \cdot t = \frac{R^2}{2} + C \quad (6)$$

Stałą całkowania C otrzymujemy z warunku początkowego, który w tym przypadku mówi że wartość promienia fali uderzeniowej w chwili $t_0 = 0$ wynosi R_0 , więc $C = -\frac{R_0^2}{2}$. Z otrzymanego równania:

$$\sqrt{\frac{E}{2\pi\rho\Delta x}} \cdot t = \frac{R^2}{2} - \frac{R_0^2}{2} \quad (7)$$

wyprowadzamy szukaną zależność $R(t)$:

$$R(t) = \sqrt{\sqrt{\frac{2E}{\pi\rho\Delta x}} \cdot t + R_0^2} \quad (8)$$

która jest szukaną zależnością promienia fali uderzeniowej od czasu, wynikającą z przyjętego modelu.

W oparciu o wyprowadzony model, można łatwo odpowiedzieć na pytanie: “po jakim czasie od chwili eksplozji, fala uderzeniowa osiągnie punkt oddalony o R od miejsca epicentrum wybuchu?”. Aby odpowiedzieć na to pytanie, podnosimy równanie na $R(t)$ stronami do kwadratu, i wyprowadzamy z równania czas t , otrzymując równanie:

$$t = \frac{R^2 - R_0^2}{\sqrt{\frac{2E}{\pi\rho\Delta x}}} \quad (9)$$

Gdy odległość R będzie znacznie większa od początkowego promienia fali uderzeniowej R_0 , czyli $R \gg R_0$, możemy zastosować przybliżenie $R^2 - R_0^2 \approx R^2$, i otrzymujemy wzór na przybliżony czas t :

$$t \approx \frac{R^2}{\sqrt{\frac{2E}{\pi\rho\Delta x}}} \quad (10)$$

We wzorze wartości: R , E , ρ można uznać za wielkości, które można przy praktycznym zastosowaniu łatwo ustalić. W modelu występuje znacząca zależność od wprowadzonego parametru: nieznanej grubości czoła fali uderzeniowej Δx , którą można dla danej energii eksplozji próbować ustalić na podstawie analizy filmu z nagraniem fali uderzeniowej powstałej wskutek eksplozji atomowej.

Źródło: strona internetowa <https://jkir.sdfeu.org>